

July - August 2019  
B. Sc. Vth Semester ATKT Examination

MATHEMATICS

Linear Algebra and Numerical Analysis

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150

[Min. Marks : Regular 42 / Private 50

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शाये अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनट अतिरिक्त समय की अनुमति है।  
Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular 15×2=30 / Private 15×1=15

1. एक रैखिकतः स्वतन्त्र समुच्चय का कोई उपसमुच्चय होता है :  
(अ) रैखिकतः स्वतन्त्र  
(ब) रैखिकतः परतन्त्र  
(स) न तो रैखिक परतन्त्र है न स्वतन्त्र  
(द) इनमें से कोई नहीं।  
Any subset of a linearly independent set is :  
(a) Linearly independent  
(b) Linearly dependent  
(c) Neither linearly dependent nor independent  
(d) None of these.
2. सदिश समष्टि  $V_2(F)$  के अवयव  $(a_1, a_2)$  तथा  $(b_1, b_2)$  रैखिकतः स्वतन्त्र होंगे यदि और केवल यदि :  
The elements  $(a_1, a_2)$  and  $(b_1, b_2)$  of the vector space  $V_2(F)$  are linearly independent if and only if :  
(a)  $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$  (b)  $a_1 a_2 - b_1 b_2 \neq 0$  (c)  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  (d)  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$
3. यदि  $V(F)$  एक परिमित विमीय सदिश समष्टि हो तो  $V$  के किन्हीं दो आधारों में अवयव :  
(अ) सम संख्या में होते हैं (ब) समान संख्या में होते हैं (स) विषम संख्या में होते हैं (द) इनमें से कोई नहीं।  
If  $V(F)$  is a finite dimensional vector space, then the number of elements in any two bases are:  
(a) Even in numbers (b) Equal in numbers (c) Odd in numbers (d) None of these.
4. मान लो  $U(F)$  और  $V(F)$  दो सदिश समष्टि हैं तो  $f: U \rightarrow V$  तुल्याकारिता है जब :  
(अ)  $f$ -एकैकी है (ब)  $f$ -एकैकी आच्छादक है  
(स)  $f$ -एकैकी आच्छादक और रैखिक है (द) इनमें से कोई नहीं।  
Let  $U(F)$  and  $V(F)$  be two vector spaces, then  $f: U \rightarrow V$  is an isomorphism when :  
(a)  $f$  is a one-one (b)  $f$  is one-one onto  
(c)  $f$  is one-one onto and linear (d) None of these.
5. यदि  $T: U \rightarrow V$  रैखिक प्रतिचित्रण है तो  $R(T)$  :  
(अ)  $U$  का उपसमष्टि है (ब)  $V$  का उपसमष्टि है  
(स)  $U$  अथवा  $V$  का उपसमष्टि है (द) इनमें से कोई नहीं।  
If  $T: U \rightarrow V$  be a linear transformation, then  $R(T)$  is :  
(a) a subspace of  $U$  (b) a subspace of  $V$   
(c) a subspace of either  $U$  or  $V$  (d) None of these.
6. यदि एक व्युत्क्रमणीय रूपान्तरण  $T$  का अभिलाक्षणिक मान  $\lambda$  है तो  $T^{-1}$  का अभिलाक्षणिक मान है :  
If  $\lambda$  is the eigen value of an invertible transformation  $T$ , then eigen value of  $T^{-1}$  is :  
(a)  $\lambda$  (b)  $\lambda^{-1}$  (c)  $-\lambda$  (d) 0

7. द्विभाजन विधि का अभिसरण है :  
 (अ) रेखिक (ब) द्विघात  
 The convergence in bisection method is :  
 (a) Linear (b) Quadratic
8. अग्र अन्तर में  $\Delta f(x_k)$  का मान होगा : In forward difference value of  $\Delta f(x_k)$  is :  
 (a)  $f(x_k - h) - f(x_k)$  (b)  $f(x_k + h) - f(x_k)$   
 (c)  $f(x_k) - f(x_k - h)$  (d)  $f(x_k) - f(x_k + h)$
9. प्रायिक संकेतनों में E के सही विकल्प का चयन कीजिए : In the usual notations, choose the correct choice.  
 (a)  $E = 1 + \Delta$  (b)  $E = 1 - \Delta$  (c)  $E = 1 + \nabla$  (d)  $E = 1 - \nabla$
10. गॉउस-विलोपन विधि है :  
 (अ) प्रत्यक्ष विधि (ब) अप्रत्यक्ष विधि  
 (स) पुनरावृत्ति विधि (द) इनमें से कोई नहीं ।  
 Gauss-Elimination Method is :  
 (a) Direct Method (b) Indirect Method  
 (c) Iterative Method (d) None of these.
11. कोई वास्तविक सममित आव्यूह  $A = (a_{ij})$  अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि :  
 A real square matrix  $A = (a_{ij})$  is said to be non-singular if :  
 (a)  $|A| = 0$  (b)  $|A| \neq 0$   
 (c)  $|A| = 1$  (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.
12. चेलोस्की विधि में : In Cholesky Method :  
 (a)  $L^{-1} L^T = A$  (b)  $L + L^T = A$   
 (c)  $LL^T = A$  (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.
13. समीकरण  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  जबकि  $y(x_0) = y_0$  के हल के लिए मिले कोरेक्टर सूत्र होगा :  
 Milne's Corrector Formula for the solution of  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  when  $y(x_0) = y_0$  is :  
 (a)  $y_4 = y_2 + h/3 (f_2 + 4f_3 + f_4)$  (b)  $y_4 = y_0 + h/3 (f_2 + 4f_3 + f_4)$   
 (c)  $y_4 = y_2 + h/3 (f_2 - 4f_3 + f_4)$  (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.
14. सिम्पसन का एक-तिहाई सूत्र कहलाता है :  
 (अ) दीर्घवृत्तीय सूत्र (ब) परवलयिक सूत्र (स) अतिपरवलयिक सूत्र (द) त्रिघातीय सूत्र ।  
 Simpson's one-third formula is also called :  
 (a) Elliptic formula (b) Parabolic formula (c) Hyperbolic formula (d) Cubic formula.
15. कोटि संख्याओं के प्रगुण में  $\sum_{k=0}^n C_k^n$  का मान है : In properties of Cote's numbers the value of  $\sum_{k=0}^n C_k^n$  is :  
 (a) 1 (b) 0  
 (c)  $\infty$  (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

### खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5x5=25 / Private 5x9=

1. सिद्ध कीजिए किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  की कोई दो उपसमष्टियों  $W_1$  और  $W_2$  का सर्वनिष्ठ  $W_1 \cap W_2$  भी  $V(F)$  का उपसमष्टि है ।  
 Prove that if  $W_1$  and  $W_2$  are two vector subspaces of a vector space  $V(F)$  then  $W_1 \cap W_2$  is also a vector subspace of  $V(F)$ .

अथवा OR

- यदि समुच्चय  $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$   $V_3(R)$  का आधार है, तब दर्शाइये कि समुच्चय  $S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$  भी  $V_3(R)$  के एक आधार समुच्चय है ।  
 Show that if  $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  is a basis of  $V_3(R)$  then the set  $S' = \{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha\}$  is also a basis of  $V_3(R)$ .

2. सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण  $f: V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$  जो  $f(x, y) = (x^3, y^3)$  द्वारा परिभाषित है, एक रेखिक रूपान्तरण नहीं है।  
Show that the mapping  $f: V_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_2(\mathbb{R})$  defined by  $f(x, y) = (x^3, y^3)$  is not a linear transformation.

अथवा OR

यदि रूपान्तरण  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  जो परिभाषित है  $f(a, b) = (a - b, b - a, -a) \forall a, b \in \mathbb{R}$  एक रेखिक रूपान्तरण है तो  $f$  का परास और शून्यता ज्ञात कीजिये।

If the transformation  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined by  $f(a, b) = (a - b, b - a, -a) \forall a, b \in \mathbb{R}$  is a linear transformation then find range and nullity of  $f$ .

3. न्यूटन-रेफसन की विधि द्वारा दो पुनरावृत्ति लेकर समीकरण  $x^2 + 4 \sin x = 0$  के मूल का मूल्यांकन प्रारम्भिक अनुमानों  $-1.9$  और  $-2$  के प्रयोग से ज्ञात कीजिए।  
Find the real root of the equation  $x^2 + 4 \sin x = 0$  with initial estimates  $-1.9$  and  $-2$  using Newton-Raphson Method. Perform two iterations.

अथवा OR

निम्न सारणी से विलुप्त पद ज्ञात कीजिए : Find the missing value in the following table :

$x$	:	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	:	—	8	3	0	-1	0

4. गॉस विलोपन विधि से हल कीजिए : Solve by Gauss-Elimination Method :  
 $2x - y + 3z = 9, x + y + z = 6, x - y + z = 2$

अथवा OR

गॉस-सीडल विधि के प्रयोग से दो पुनरावृत्ति तक निम्नलिखित समीकरणों के निकाय को हल कीजिए :  
Solve the system of equations by using Gauss-Seidel Iterative Method. Perform two iterations:

$$20x + y - 2z = 17$$

$$3x + 20y - z = -18$$

$$2x - 3y + 20z = 25$$

5. रून्गे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि के प्रयोग से  $y' = xy$  को  $x = 1.2$  के लिए हल कीजिए, प्रारम्भ में  $x = 1, y = 2$  ( $h = 0.2$  लें)।  
Use Runge-Kutta Method of fourth order to solve  $y' = xy$  for  $x = 1.2$  initially  $x = 1, y = 2$ . (Take  $h = 0.2$ )

अथवा OR

न्यूटन-कोट्स सूत्र से समलम्बी नियम को व्युत्पन्न कीजिए।  
Derive Trapezoidal Rule from Newton-Cote's Formula.

### खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular  $5 \times 14 = 70$  / Private  $5 \times 18 = 90$ 

1. सिद्ध कीजिए किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  के एक अरिक्त उपसमुच्चय  $W$  के लिये  $V$  का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है :  
Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $W$  of a vector space  $V(F)$  to be a subspace of  $V$  are :  
(a)  $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$  and  
(b)  $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

अथवा OR

यदि  $W_1$  और  $W_2$  एक परिमित विमीय सदिश समष्टि  $V(F)$  की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब सिद्ध कीजिये :

If  $W_1$  and  $W_2$  are two subspaces of a finite dimensional vector space  $V(F)$ , then prove that :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \quad \text{https://www.davvonline.com}$$

2. दर्शाइये कि निम्न आव्यूह  $A$  विकर्णीय है : Show that the following matrix  $A$  is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

अथवा OR

ज्ञाति शून्यता प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Rank-Nullity Theorem.

3. विद्यार्थी विधि के प्रयोग से समीकरण  $x^3 - 2x - 5 = 0$  का अन्तराल  $[2, 2.1]$  में वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए।  
 Using Regula-Falsi Method, find the real root of the equation  $x^3 - 2x - 5 = 0$  in the interval  $[2, 2.1]$ .

अथवा OR

एक देश की प्रति दस वर्षों में होने वाली जनगणना निम्नानुसार थी। सन् 1927 की जनगणना न्यूटन अग्र अन्तर्वेशन सूत्र के प्रयोग से कीजिए।  
 The population of a country in the decennial censuses were as under. Estimate the population for the year 1925 using Newton's forward interpolation formula:

वर्ष Year $x$	जनगणना (लाखों में) Population (in thousands) $y$
1891	46
1901	66
1911	81
1921	93
1931	101

4.  $LU$  विघटन विधि के प्रयोग से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।  
 Apply LU Decomposition Method to solve the equations:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 18 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20 \end{aligned}$$

अथवा OR

जैकोबी विधि से निम्नलिखित समीकरणों के निकाय को पाँच पुनरावृत्ति तक हल कीजिए।  
 Use Jacobi's Method and solve the system of equations: (Perform five iterations)

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 12z &= 35 \\ 8x - 3y + 2z &= 20 \\ 4x + 11y - z &= 33 \end{aligned}$$

5. दिया गया है:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

जबकि प्रारम्भिक प्रतिबन्ध  $x_0 = 0, y_0 = 1$  है।  $x = 0.05$  के लिए  $y$  का मान ऑयलर के संशोधित विधि से ज्ञात कीजिए।  
 (h = 0.05).  
 Use modified Euler's Method to compute  $y$  for  $x = 0.05$ . Given that  $\frac{dy}{dx} = x + y$  with initial conditions  $x_0 = 0, y_0 = 1$ . (Take  $h = 0.05$ )

अथवा OR

गॉउसीय क्षेत्रकलन सूत्र के प्रयोग से तीन कोटियों के लिए समाकल  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  का मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate the integral  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  using Gaussian Quadrature Formula for three ordinates.