

**May 2014**  
**B. Sc. IVth Semester Examination**

**MATHEMATICS**

**Advanced Calculus, Partial Differential Equation, Complex Analysis and Abstract Algebra**  
उच्च कलन, आंशिक अवकल समीकरण, सम्प्रिण विश्लेषण एवं अमूर्त बीज गणित

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150 / Old ATKT 105

**नोट :** खण्ड अ, व तथा सभी विद्यार्थियों - नियमित, प्रायवेट एवं ओल्ड ए.टी.के.टी. के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योग्यता अवलम्बन में उल्लंघन अनुसार होगी। दृष्टि वाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

**Section A, B and C are compulsory for all - Regular, Private and Old ATKT students.**  
Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

**खण्ड अ : बास्तुनिक** Section A : Objective      Reg.  $15 \times 2 = 30$  / Pvt.  $15 \times 1 = 15$  / Old ATKT  $15 \times 1 = 15$

1. यदि : If  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  तब : then :  $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = :$ 
  - (a)  $r$
  - (b)  $1/r$
  - (c)  $r^2$
  - (d)  $1/r^2$ .
2. यदि : If  $z = e^{xy}$  तब : then :  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = :$ 
  - (a)  $xyz$
  - (b)  $(x+y).z$
  - (c)  $(xy+1).z$
  - (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
3. यदि  $u = \sin^{-1} \left( \frac{x+y}{\sqrt{x+y}} \right)$  तब समघात फलन  $\sin u$  की घात है :
 

If  $u = \sin^{-1} \left( \frac{x+y}{\sqrt{x+y}} \right)$  then degree of Homogeneous function  $\sin u$  is :

  - (a)  $1/2$
  - (b)  $1$
  - (c)  $-1/2$
  - (d)  $-1$ .
4.  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = :$ 
  - (a)  $\beta(m, n)$
  - (b)  $\beta(n, m)$
  - (c)  $\frac{1}{2} \beta(m, n)$
  - (d)  $2 \beta(m, n)$ .
5. किसी बिन्दु  $(a, b)$  के फलन  $f(x, y)$  का पल्याण बिन्दु होने के लिये प्रतिबन्ध है :
 

The condition for the point  $(a, b)$  to be a saddle point of the function  $f(x, y)$  is :

  - (a)  $rt - s^2 = 0$
  - (b)  $rt - s^2 < 0$
  - (c)  $rt - s^2 > 0$
  - (d)  $r = s = t = 0$ .
6.  $\int_1^2 \int_0^{3y} y dy dx = :$ 
  - (a) 1
  - (b) 3
  - (c) 5
  - (d) 7.
7. लैंग्राज समीकरण  $P.p + Q.q = R$  के सहायक समीकरण हैं :
 

Auxiliary equation of Lagrange's equation  $P.p + Q.q = R$  is :

  - (a)  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$
  - (b)  $\frac{dx}{Q} = \frac{dy}{P} = \frac{dz}{R}$
  - (c)  $P dx + Q dy + R dz = 0$
  - (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
8. आंशिक अवकलन समीकरण  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$  है :
 

(अ) दीर्घवृत्तीय      (ब) परवलयिक      (स) अति परवलयिक      (द) वृत्तीय।

The partial differential equation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ :

  - (a) Elliptic
  - (b) Parabolic
  - (c) Hyperbolic
  - (d) Circular.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short A

1. फलन  $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$  का  $(x - 1)$  और  $(y + 2)$  की घातों में टेलर प्रमेय द्वारा प्रसार कीजिए।  
 Expand  $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$  in powers of  $(x - 1)$  and  $(y + 2)$ .

अथवा OR

Find the envelope of the family of curves  $y = mx + c$ .

2. मान ज्ञात कीजिए : Evaluate :

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x \, dz \, dx \, dy.$$

यदि समाकलन  $R, y = 0, y = x$  और  $x = 1$  हैं तो अथवा OR

When the Eigen of integration R is the tri-diagonal matrix

$$\int_R \int \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy = \frac{1}{3} (\pi/3 + \sqrt{3}/2).$$

3. चारपिट विधि से ज्ञात कीजिए : Find by Charpit's method :  

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

### हल कीजिए : Solve :

$$(2r - s - 3t) = 5\rho^x - y$$

अथवा OR

4. दर्शाइए कि फलन  $f(z) = \bar{z}$  बिन्दु  $z = 0$  पर अवकलनीय नहीं है।  
Show that function  $f(z) = \bar{z}$  is not a differentiable at  $z = 0$ .

अथवा OR

उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$  को क्रमशः  $w_1 = 1, w_2 = i$  तथा  $w_3 = -1$  में रूपान्तरित करता है।

Find the Möbius transformation which maps the points  $z_1 = 2, z_2 = i$  and  $z_3 = -2$  in to the points  $w_1 = 1, w_2 = i$  and  $w_3 = -1$  respectively.

5. सिद्ध कीजिए कि किसी वलय के दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ उस वलय का एक गुणजावली होता है।  
Prove that the intersection of two ideals of any ring is an ideal of that ring.

अथवा OR

किसी समूह  $G$  के अवयव के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए वह समूह  $G$  का एक उपसमूह होता है।  
Define normalizer of an element of a group  $G$  and prove that it is an subgroup of group  $G$ .

### खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long AnswerReg. 5x14=70/Pvt. 5x18=90/Old ATKT 5x12=60

1. यदि  $f(x, y)$ ,  $x$  और  $y$  का  $n$  घातीय समघात फलन हो तो सिद्ध कीजिए :

If  $f(x, y)$  is a homogeneous function of variables  $x$  and  $y$  of degree  $n$  prove that :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

अथवा OR

प्रतिस्थापन  $x = \frac{1}{z}$  के द्वारा समीकरण  $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2 \frac{dy}{dx} + x^2y = 0$  को रूपान्तरित कीजिए।

Transform the equation  $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2 \frac{dy}{dx} + x^2y = 0$  by the substitution  $x = \frac{1}{z}$ .

2. फलन  $u = x^2 + y^2 + z^2$  का निमिष मान ज्ञात कीजिए जहाँ  $ax + by + cz = p$  दिया गया है।  
Find the minimum value of  $u = x^2 + y^2 + z^2$  having given  $ax + by + cz = p$ .

अथवा OR

एक धनात्मक वास्तविक संख्या  $m$  के लिये : For a positive real number  $m$  :

सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}.$$

3. हल कीजिए : Solve :  $(y + z)p + (z + x)q = x + y$ .

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :  $(D^3 - 4D^2D' + 4D D'^2)z = 4 \sin(2x + y)$ .

4. सिद्ध कीजिए : मोबियस रूपान्तरणों का समुच्चय, रूपान्तरणों के गुणन संक्रिया के अन्तर्गत एक अन-आबेली समूह का निर्माण करता है।

Prove that the set of all bilinear transformation forms a non-abelian group under the product of transformations.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि फलन  $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$  लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषक फलन  $u + iv$  को ज्ञात कीजिए।

Prove that the function  $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$  satisfies Laplace's equations and determine corresponding analytic function  $u + iv$ .

5. सिद्ध कीजिए प्रत्येक वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब उस वलय के विभाग वलय का तुल्यकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of ring is isomorphic to its quotient ring.

अथवा OR

परिमित आबेली समूहों के लिये कौशी प्रमेय लिखिए और उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for finite abelian groups.