

June 2015

B. Sc. IVth Semester Examination

MATHEMATICS

Advanced Calculus, Partial Differential Equation, Complex Analysis and Abstract Algebra

उच्च कलन, आंशिक अवकल समीकरण, सम्मिश्र विश्लेषण एवं अमूर्त बीज गणित

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150 / Old ATKT 105

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी विद्यार्थियों - नियमित, प्रायवेट एवं ओल्ड ए.टी.के.टी. के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दशमि अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनट अतिरिक्त समय की अनुमति है।
Section A, B and C are compulsory for all - Regular, Private and Old ATKT students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective Reg. 15x2=30/Pvt. 15x1=15/Old ATKT 15x1=15.

- यदि : If $u = e^{x/y}$, तब then the value of $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ का मान होगा :
(a) 0 (b) u
(c) $2u$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- समघात फलन $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ की घात है : The degree of homogeneous function $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ is :
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- यदि $x = u(1 + v)$, $y = v(1 + u)$, तब $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ का मान होगा : DAVVonline.com
If $x = u(1 + v)$, $y = v(1 + u)$, then the value of $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ is :
(a) $1 + u + v$ (b) $1 - u - v$
(c) $1 - u + v$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- फलन $f(x, y)$ बिन्दु (a, b) पर उच्चिष्ठ है जब : Function $f(x, y)$ has a maxima at (a, b) when :
(a) $rt - s^2 > 0, r > 0$ (b) $rt - s^2 > 0, r < 0$
(c) $rt - s^2 < 0, r > 0$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- $\Gamma 0$ का मान है : The value of $\Gamma 0$ is :
(a) 0 (b) 1
(c) ∞ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- $\int_0^1 \int_0^2 dx dy$ का मान है : The value of $\int_0^1 \int_0^2 dx dy$ is :
(a) 1 (b) 2
(c) -2 (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- लैग्रान्ज समीकरण का मानक रूप है : The standard form of Lagrange's equation is :
(a) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ (b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$ (c) $p + q = pq$ (d) $Pp + Qq = R$.
- प्रथम कोटि के अरेखिक अवकल समीकरण $f(x, y, z, p, q) = 0$ को हल करने की व्यापक विधि कहलाती है :
(अ) क्लेष्ट विधि (ब) चारपिट विधि (स) ऑयलर विधि (द) बर्नोली विधि।
The general method of solving first order non-linear partial differential equation $f(x, y, z, p, q) = 0$ is called :
(a) Claruit's method (b) Charpits method (c) Euler's method (d) Bernouili's method.

9. अवकल समीकरण $r + a^2t = 0$ का सामान्य हल है :

The general solution of the differential equation $r + a^2t = 0$ is :

(a) $z = \Phi_1(y + aix) + \Phi_2(y - aix)$

(b) $z = \Phi_1(y + aix) + z \Phi_2(y - aix)$

(c) $z = x \Phi_1(y + aix) + \Phi_2(y - aix)$

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

DAVVonline.com

10. i का कोणांक है : Argument of i is :

(a) $\pi/2$

(b) $-\pi/2$

(c) $\pi/4$

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

11. $z + \bar{z}$ बराबर है : $z + \bar{z}$ is equal to :

(a) $|z|$

(b) $2 \operatorname{Re}(z)$

(c) $2 \operatorname{Im}$

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

12. यदि : If : $w = T_1(z) = \frac{z+2}{z+3}$, $w = T_2(z) = \frac{z}{z+1}$, तब : then : $T_1 T_2(z) = ?$:

(a) $\frac{3z+2}{4z+3}$

(b) $\frac{3z+3}{4z+4}$

(c) $\frac{4z+3}{3z+2}$

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

13. चक्रीय समूह $G = \langle a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e \rangle$ की कोटि 5 है, तब $O(A(G)) = ?$:

Let $G = \langle a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e \rangle$ be a cyclic group of order 5, then $O(A(G)) = ?$:

(a) 3

(b) 4

(c) 2

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

14. यदि $G = S_3$ सममित समूह है, जब G के P-साइलो उपसमूहों की संख्या होगी :

If $G = S_3$ is symmetric group, then number of P-sylow subgroups of G are :

(a) 5

(b) 4

(c) 6

(d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

15. गुणजावली $M = \{5r : r \in I\}$ है :

(अ) उच्चिष्ठ गुणजावली (ब) अभाज्य गुणजावली

The ideal $M = \{5r : r \in I\}$ is :

(a) Maximal Ideal (b) Prime Ideal

(स) वाम गुणजावली

(द) इनमें से कोई नहीं |

(c) Left Ideal

(d) None of these.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Reg. 5×5=25/Pvt. 5×9=45/Old ATKT 5×6=3

1. यदि $\mu = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$ तब दर्शाइये कि :

If $\mu = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$ then show that :

$$x \frac{\partial \mu}{\partial x} + y \frac{\partial \mu}{\partial y} = \tan \mu.$$

DAVVonline.com

अथवा OR

यदि $u = f(y - x, z - y)$, तब सिद्ध कीजिए : If $u = f(y - x, z - y)$, then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

2. फलन $u = x^3 - y^2 - 3x$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए ।

Discuss the maximum or minimum of the function $u = x^3 - y^2 - 3x$.

अथवा OR

फलन $u = x^3 - y^3 - 3axy$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए ।

Discuss the maximum or minimum of the function $u = x^3 - y^3 - 3axy$.

3. हल कीजिए : Solve : $r = 2y^2$.

अथवा OR

हल कीजिए : Solve : $yt - q = xy$.

4. दिखाइये कि फलन है $e^x (\cos y + i \sin y)$ वैश्लेषिक है ।
Show that the function $e^x (\cos y + i \sin y)$ is analytic.

अथवा OR

- दिखाइये कि फलन $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ प्रसंवादी है ।
Show that the function $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ is harmonic.

5. सिद्ध कीजिए कि संयुग्मीयता G पर एक तुल्यता सम्बन्ध होता है ।
Conjugacy is an equivalence relation on G.

अथवा OR

- किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$ सदैव G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।
The centre $Z(G)$ of any group G is a normal subgroup of G.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer Reg. $5 \times 14 = 70$ / Pvt. $5 \times 18 = 90$ / Old ATKT $5 \times 12 = 60$

1. यदि : $H: u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तो सिद्ध कीजिए कि : Then prove that :

$$(a) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z} \quad (b) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$

अथवा OR

- फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-1)$ और $(y-3)$ की घातों में प्रसार कीजिए ।
Expand $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in power of $(x-1)$ and $(y-3)$.

2. सिद्ध कीजिए : Prove that : $B(m, n) = \frac{\Gamma m \Gamma n}{\Gamma m+n}$.

अथवा OR

मान ज्ञात कीजिए : Evaluate : $\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$.

3. लैग्रान्ज विधि से हल कीजिए : Solve by Lagrange's method : $(y+z)p + (z+x)q = x+y$. DAVVonline.com

अथवा OR

चारपिट विधि से हल कीजिए : Solve by Charpit's method : $px + qy = pq$.

4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = |z|^2$ सर्वत्र संतत है किन्तु मूल बिन्दु के अतिरिक्त कहीं भी अवकलनीय नहीं है ।
Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin.

अथवा OR

वैश्लेषिक फलन के लिए कौशी रिमान समीकरण प्राप्त कीजिए ।
Find Cauchy-Riemann equation for any analytic function.

5. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय प्रतिविचित्रों के संयोजन के रूप में लेने के सापेक्ष एक समूह निर्मित करता है ।
Prove that the set of all automorphism of a group G forms a group with respect to composition of mapping as the composition.

अथवा OR

आबेली समूहों के लिए कौशी प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए ।
State and prove that Cauchy's theorem for abelian groups.