

May - June 2018

B. Sc. IVth Semester Examination

MATHEMATICS

MATHEMATICS
Abstract Algebra, Advanced Calculus, Partial Differential Equations, Complex Analysis

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150]

[Min. Marks : Regular 42 / Private 50]

नोट : खण्ड अ, व तथा सु सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शायी अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular $15 \times 2 = 30$ / Private $15 \times 1 = 15$

- यदि ϕ समूह G का एक स्वकारिता है | यदि $a \in G$ की कोई कोटि $o(a) > 0$ तब :
 ϕ is an automorphic on G if $a \in G$ and $o(a) > 0$ then :
 - (a) $O(\phi(a)) = 1$
 - (b) $O(\phi(a)) = O(a) + 1$
 - (c) $O(\phi(a)) = O(a)$
 - (d) $O(\phi(a)) = O(a) - 1$.
 - यदि G एक परिमित समूह है और $O(G) = p^n$, जहाँ p अमाज्य संख्या है और n धन पूर्णक है तो G का केन्द्र :
 Let G be a finite group and $O(G) = p^n$, where p is prime number and n is positive integer, then centre of G is :
 - (a) $Z = \{e\}$
 - (b) $Z \neq \{e\}$
 - (c) $Z = G$
 - (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
 - यदि G एक समूह हो तो, तब $e \in G$ के लिए, $c(e) =$: If G be a group, then for $e \in G$, $c(e) =$:
 - (a) G
 - (b) $\{e\}$
 - (c) \emptyset
 - (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
 - निम्नलिखित संरचनाओं में से कौनसा वलय नहीं है : Which of the following structure is not a ring :
 - (a) $(2 \text{ I}, +, .)$
 - (b) $(Q, +, .)$
 - (c) $(N, +, .)$
 - (d) $(R, +, .)$.
 - एक वलय R के एक अरिक्त उपसमुच्चय S का वलय R के उपवलय होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध : Necessary and sufficient condition for a non empty subset S of a ring R is to be a sub ring :
 - (a) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ and $a + b \in S$
 - (b) $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$ and $a \cdot b \in S$
 - (c) $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S$ and $a \cdot b \in S$
 - (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
 - यदि $f: R \rightarrow R'$ एक समाकारिता है, तब निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य नहीं है :
 If $f: R \rightarrow R'$ is a homomorphism, then which of the following statement is not true :
 - (a) $f(a + b) + f(a) - f(b)$
 - (b) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
 - (c) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
 - (d) $f(0) = 0'$.
 - कोई विन्दु (a, b) एक फलन $f(x, y)$ का पल्याण बिन्दु होगा यदि : A function $f(x, y)$ has saddle point at (a, b) if
 - (a) $rt - s^2 = 0$
 - (b) $rt - s^2 < 0$
 - (c) $rt - s^2 > 0$
 - (d) $r = t = 0$.
 - अनुचित समाकलन $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ है :
 - (अ) प्रथम प्रकार
 - (ब) द्वितीय प्रकार
 - (स) तृतीय प्रकार
 - (द) इनमें से कोई नहीं |
 Improper integration $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ is of :
 - (a) First kind
 - (b) Second kind
 - (c) Third kind
 - (d) None of these.

9. $\int_0^1 x^{11} (1-x)^{15} dx = :$
- (a) $\beta(5, 7)$ (b) $\beta(10, 14)$ (c) $\beta(11, 15)$ (d) $\beta(12, 16)$.
10. समीकरण $z = px + qy + f(p, q)$ का हल है : Solution of the equation $z = px + qy + f(p, q)$ is :
- (a) $z = f(ax, bx)$ (b) $z = ax + by + f(a, b)$
 (c) $z = f(ax/by)$ (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
11. समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ है :
- (अ) दीर्घवृत्तीय (ब) अतिपरवलियक (ग) परवलियक (द) इनमें से कोई नहीं |
 Equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ is :
- (a) Elliptic (b) Hyperbolic (c) Parabolic (d) None of these.
12. समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ का हल है : Solution of differential equation is :
- (a) $z = \phi_1(y+ix) + x\phi_2(y+ix)$ (b) $z = \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x)$
 (c) $z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y+x)$ (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
13. $W = \frac{z}{z-2}$ के नियत बिन्दु हैं : Fixed point of $W = \frac{z}{z-2}$ are :
- (a) 0, 2 (b) 0, 3 (c) 1, 2 (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.
14. यदि $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, तब $-d/c$ को कहते हैं :
- (अ) T का स्थिर बिन्दु (ब) आन्तरिक बिन्दु (स) क्रांतिक बिन्दु (द) इनमें से कोई नहीं |
 If $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, then $-d/c$ is called :
- (a) Fixed point of T (b) Interior point (c) Critical point (d) None of these.
15. यदि $f(z) = u + iv$ विश्लेषिक हो, तब : If $f(z) = u + iv$ is an analytic function, then :
- (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
 (c) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं | None of these.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5x5=25 / Private 5x9=45

1. सिद्ध करो कि समूह G पर सभी स्वाकारिता का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह बनाते हैं।
 Prove that the set of all automorphism of a group G form a group with respect to compositive of functions as the composition.

अथवा OR

सिद्ध करो समूह G के किसी अवयव a का प्रसामान्य $N(a)$, G का एक उपसमूह है।

Prove that the normalizer $N(a)$ of $a \in G$ is a subgroup of group G .

2. सिद्ध कीजिए एक वलय R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम का पालन होता है।
 Prove that a ring R has no zero divisor, if and only if the cancellation law hold in R .

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि समपूर्णांकों का समुच्चय, पूर्णांकों के वलय की गुणजावली होती है।

Prove that the set of even integers is an ideal of the ring of integers.

3. समाकलन $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(1+x^{1/2})}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिये।

Examine the convergence of $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(1+x^{1/2})}$.
 अथवा OR

सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\int_0^2 x(8-x^3)^{2/3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}.$$

4. हल कीजिए : Solve :

$$(y+x)p + (z+x)q = x+y.$$

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :

$$(D^3 - 4D^2 D' + 4DD'^2) z = 0.$$

5. सिद्ध कीजिए कि फलन $|z|^2$ मूल बिन्दु को छोड़कर कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

Prove that function $|z|^2$ no where differentiable except origin.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ प्रसंबादी है तथा इसका प्रसंबादी सयुगमी ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5x14=70 / Private 5x18=90

1. G एक परिमित अन आबेली समूह है और अभाज्य संख्या P, समूह G कोटि का भाजक है, तब सिद्ध कीजिए कि G में एक अवयव a इस प्रकार होगा कि $a^P = e$.

G is a finite non abelian group and prime number P is a divisor of order of G, then prove that there is an element a in G such that $a^P = e$.

अथवा OR

यदि $O(G) = p^2$, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है तो सिद्ध कीजिए G एक आबेली समूह होगा।

If $O(G) = p^2$, where p is a prime number then prove that G is an abelian group.

2. सिद्ध कीजिए किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to it's some quotient ring.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए प्रत्येक परिमित पूर्णकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

3. सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\sqrt{m} \cdot \sqrt{m+1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}.$$

अथवा OR

निम्न फलन का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए :

Find the maxima and minima of the following function :

$$u = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

4. हल कीजिए : Solve :

$$(D^2 - 6D \cdot D' + 9D'^2) = 12x^2 + 36xy.$$

अथवा OR

अवकलन समीकरण $(p^2 + q^2)y = qz$ को पूर्ण हल कीजिए।

Find out the complete integral of $(p^2 + q^2)y = qz$.

5. उच्च मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $z_1 = 2, z_2 = 1$ तथा $z_3 = 0$ को बिन्दुओं $w_1 = 1, w_2 = 0$ तथा $w_3 = i$ में रूपान्तरित करता है।

Find the Möbius transformation which transforms the point $z_1 = 2, z_2 = 1$ and $z_3 = 0$ in to $w_1 = 1, w_2 = 0$ and $w_3 = i$.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए किसी फलन $f = u + iv$ के समुच्चय D में विश्लेषिक होने का आवश्यक प्रतिबन्ध :

Prove that necessary condition for function $f = u + iv$ to be analytic in set D are :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ और } \text{and } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$