

गणित (Mathematics)-2016

Abstract Algebra, Advanced Calculus,
Partial Differential Equations, Complex Analysis

Time : 3 Hours]

[Max Marks : Regular 125/Private 150]

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ[Regular $15 \times 2 = 30$ /Private $15 \times 1 = 15$]

1. यदि G एक आबेली समूह है और $a \in G$, तब $C(a) = :$
If G is an abelian group and $a \in G$, then $C(a) = :$
 - (a) ϕ (b) G (c) $\{a\}$ (d) इनमें से कोई नहीं।
2. यदि G एक परिमित आबेली समूह है और $2 \mid 0(G)$, तब एक अवयव $a (\neq e) \in G$ का अस्तित्व इस प्रकार से है कि :
If G is a finite abelian group and $2 \mid 0(G)$, then there exists an element $a (\neq e) \in G$ such that :
 - (a) $a^2 = a$ (b) $a^2 \neq e$ (c) $a^2 = e$ (d) इनमें से कोई नहीं।
3. यदि G परिमित समूह है, p अभाज्य है तथा $p \mid 0(G)$, तब G का अवयव रहता है जिसकी कोटि होगी :
If G is a finite group, p is prime and $p \mid 0(G)$, then G has an element of order :
 - (a) $p - 1$ (b) p (c) $2p$ (d) इनमें से कोई नहीं।
4. निम्न में से कौन-सी संरचना बलय नहीं है :
Which of the following structure is not a ring :
 - (a) $(2\mathbb{L}, +, \cdot)$ (b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ (c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
5. निम्न में से कौन-सी संरचना क्षेत्र नहीं है :
Which of the following structure is not a field :
 - (a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (b) $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ (c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (d) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
6. गुणजावली $M = (5r : r \in I)$ है :
(अ) दक्षिण गुणजावली (ब) अभाज्य गुणजावली
(स) वाम गुणजावली (द) इनमें से कोई नहीं।
7. समाकल $\int \frac{dx}{x^n}$ अभिसारी है, जहाँ $a > 0$, यदि :
The integral $\int \frac{dx}{x^n}$ is convergent, where $a > 0$, if :
 - (a) $n < 1$ (b) $n = 1$ (c) $n > 1$ (d) None of these.
8. समाकल $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ अभिसारी है, यदि :
The integral $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ is convergent, if :
 - (a) $n > 1$ (b) $n = 1$ (c) $n < 1$ (d) इनमें से कोई नहीं।

9. $\sqrt{1/2}$ का मान है : The value of $\sqrt{1/2}$ is :

- (a) $\sqrt{\pi/2}$ (b) $\pi/2$ (c) $\sqrt{\pi}$ (d) π .

10. लैग्रांज समीकरण का सामान्य रूप है :

- The standard form of Lagrange's equation is :
- (a) $Pp + Qq = R$ (b) $Pp + Qq = 0$
 - (c) $Px + Qy = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं।

11. $r + a^2 t = 0$ का सहायक समीकरण है :

- Auxiliary equation of $r + a^2 t = 0$ is :
- (a) $m^2 + a^2 = 0$ (b) $m^2 - a^2 = 0$
 - (c) $m^2 - 2a = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं।

12. अवकल समीकरण $(D^2 - D') z = 2y - x^2$ का विशिष्ट हल (P.I.) है :The P.I. of the differential equation $(D^2 - D') z = 2y - x^2$ is :

- (a) $x^2 y$ (b) xy^2 (c) $-x^2 y$ (d) इनमें से कोई नहीं।

13. फलन $\mu(x, y)$ प्रसंवादी है यदि :Function $\mu(x, y)$ is harmonic if :

- (a) $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$ (b) $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$
- (c) $\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.

14. $W = \frac{Z-1}{Z+1}$ के स्थिर बिन्दु हैं :Fixed points of $W = \frac{Z-1}{Z+1}$ are :

- (a) $i, -i$ (b) $1, -1$ (c) $2, -2$ (d) $1, -2$.

15. यदि $W = T_1(Z) = \frac{Z+1}{Z+3}$, $W = T_2(Z) = \frac{Z}{Z+2}$, तब $T_1 T_2(Z) = :$ If $W = T_1(Z) = \frac{Z+1}{Z+3}$, $W = T_2(Z) = \frac{Z}{Z+2}$, then $T_1 T_2(Z) = :$

- (a) $\frac{Z+2}{Z+3}$ (b) $\frac{2Z+1}{Z+3}$
- (c) $\frac{Z+1}{2Z+3}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

खण्ड ब : लघुउत्तरीय[Regular $5 \times 5 = 25$ /Private $5 \times 9 = 45$]

1. दर्शाइये कि एक प्रतिचिह्नण $f: G \rightarrow G$, जो $f(x) = x^{-1}$ द्वारा परिभाषित है $\forall x \in G$, समूह G की एक स्वाकारिता है यदि और केवल यदि G आबेली है।
Show that the mapping $f: G \rightarrow G$, defined by $f(x) = x^{-1}$, $\forall x \in G$, is an automorphism of a group G if and only if G is abelian. अथवा OR
सिद्ध करो कि $N(a)$, G का एक उपसमूह होता है।
Prove that $N(a)$ is a subgroup of G .
2. सिद्ध करो कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।
Prove that the intersection of two subrings is a subring. अथवा OR
सिद्ध करो कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Prove that every field is an integral domain.

3. समाकल $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the integral $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. **अथवा OR**

समाकल $\int_0^{\pi} \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the integral $\int_0^{\pi} \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$.

4. हल कीजिए . Solve : $xzp + yzq = xy$. **अथवा OR**

Prove that : $\int_m^{\infty} |m+1/2| = \frac{\pi}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}$

जहाँ m एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

Where m is a positive real number.

4. चारपिट विधि से हल कीजिए :

Solve by Charpit's method.

$px + qy = pq$.

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :

$(D^2 + DD' + D' - 1) z = \sin(x + 2y)$.

5. दर्शाइये कि एक हार्मोनिक फलन संतत रूप से अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ को सन्तुष्ट करता है।

Show that a harmonic function satisfies the formal differential

equation $\frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$. **अथवा OR**

उस मोबियस रूपान्तरण को शात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ को क्रमशः $w_1 = 1, w_2 = i$ और $w_3 = -1$ में रूपान्तरित करता है।

Find the Möbius transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = -1$.