

March - April 2020

गणित

MATHEMATICS

PAPER II : REAL AND COMPLEX ANALYSIS

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 40 / Private 50
[Min. Marks : Regular 13 / Private 17]

नोट: खण्ड अ, व तथा सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए निर्देशों का पालन करें। सभी के लिए अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में वर्णये अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular 5x1=5 / Premium 5x1=5

- I. यदि $f \in R [a, b]$ तब then :

2. समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)(x-4)}$:

(अ) एक उचित समाकल
 (स) द्वितीय प्रकार का विषय समाकल

(ब) प्रथम प्रकार का विषय समाकल
 (द) तृतीय प्रकार का विषय समाकल।

The integral $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)(x-4)}$ is :

दूरीक समष्टि में प्रत्येक परिमित विवृत समझयों का सर्वनिष्ठ होता है :

In a metric space every finite intersection of open sets is always :

- (a) Closed Set (b) Null Set (c) Open Set (d) None of the above.

किसी ड्रीम समष्टि का संहेत उपसमूह है : The compact subset of a metric space of :

$w = \frac{z}{2-z}$ के स्थिर बिन्दु हैं : Fixed points of $w = \frac{z}{2-z}$ are :

- (a) 0, 1; (b) 0, 2; (c) 2, 1; (d) 1, 1

वर्ष : अष्ट उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5×2=10 / Private 5×3=15

किंतु कीजिए कि प्रद्येश संवत् फलत रीमात् समाकलनीय होता है।

Show that every continuous function is Riemann integrable.

अखण्ड OR

अगर $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ परिवर्द्ध है तो $[a, b]$ के किसी विभाजन P के लिये $L(P, f)$ और $U(P, f)$ भी परिवर्द्ध होंगे।

If $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is bounded then for any partition P of $[a, b]$, $L(f, P)$ and $U(f, P)$ are bounded.

समाकल $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ के अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए जहाँ $a > 0$ ।

To test the convergence of $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}$ where a is greater than zero.

35410 OR

समाकल $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ के अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$.

3. माना एक प्रतिविष्टण $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न प्रकार परिभासित है :-

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad (x, y) \in \mathbb{R}$$

तो सिद्ध कीजिए d , \mathbb{R} पर एक दूरीक है।

Let a mapping $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined as follow :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad (x, y) \in \mathbb{R}$$

Then show that d is a metric on \mathbb{R} .

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में एक परिभित संख्या में संवृत समुच्चयों का संघ संवृत होता है।

In a metric space the union of a finite number of closed sets is closed.

4. मान सो (X, d) एक दूरीक समष्टि है $A \subseteq X$ तब फलन $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ जो :

$$f(x) = d(x, A) \quad \forall x \in X$$

से दिया जाता है, एक समान संतत होगा।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$. Then the function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ is given by :-

$$f(x) = d(x, A) \quad \forall x \in X$$

is uniformly continuous. <http://www.davvonline.com>

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि एक संबद्ध समुच्चय का संतत प्रतिविष्ट संबद्ध होता है।

Show that continuous image of a connected set is connected.

5. दो बिन्दुओं z_1 व z_2 को मिलाने वाली रेखा का समीकरण जात कीजिए।

To find the equation of straight line joining two points z_1 and z_2 .

अथवा OR

रूपान्तरण : Consider the transformation :

$$w = T_1(z) = \frac{z+1}{z+3}, \quad w = T_2(z) = \frac{z}{z+2}$$

तब जात कीजिए : then find :

$$T_1^{-1}(w), T_2^{-1}(w), T_2 T_1(z), T_1 T_2(z), T_2^{-1} T_1(z)$$

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×5=25 / Private 5×6=30

1. यदि $f(x) = x^2$ और $[0, a]$, $a > 0$ तब सिद्ध कीजिए $f \in R[0, a]$ और $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

Let $f(x) = x^2$ and $[0, a]$, $a > 0$ show that $f \in R[0, a]$ and $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$.

अथवा OR

यंग के प्रमेय का सत्यापन मूल बिन्दु पर कीजिए जहाँ $f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y$.
Verify the Young's Theorem at origin for the function $f(x, y) = x^2 y^2 + \sin x + \cos y$.

2. फलन $f(x) = e^{-x}$ की फूरियर श्रेणी अंतराल $-\pi < x < \pi$ में जात कीजिए।
Find the Fourier Series of the function $f(x) = e^{-x}$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

अथवा OR

दर्शाइए $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ अभिसारी है।

Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ converges.

3. सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोला एक संवृत समुच्चय होता है।
Show that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम दूरीक समष्टि में परिबद्ध होता है।
Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

4. मान लो (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियाँ हैं और $f: X \rightarrow Y$ एक फलन है। तब f संतत है यदि और केवल यदि $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$, X के प्रत्येक समुच्चय A के लिए।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ be a function. Then f is continuous if and only if $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$, for every subset A of X .

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि का एक संहत उपसमुच्चय संवृत और परिबद्ध होता है।
Show that a compact subset of a metric space is closed and bounded.

5. विश्लेषिक फलन के लिये कौशी-रीमान समीकरण ज्ञात कीजिए।
Obtain Cauchy-Riemann equation of analytic function.

अथवा OR

उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ को क्रमशः $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ में रूपान्तरित करता है।

Find the Möbius transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$.