

March - April 2020
B. Sc. III Year (3 Y. D. C.) Examination

गणित

MATHEMATICS

प्रथम प्रश्नांक : ऐडिक बीजगणित एवं संख्यात्मक विद्योगण

PAPER I: LINEAR ALGEBRA AND NUMERICAL ANALYSIS

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 40 / Private 50
[Min. Marks : Regular 13 / Private 17

नोट : खण्ड अ. व तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए निर्देशों का अनुसरति है। इष्टि वाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।
Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. Scientific Calculator will be allowed. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular $5 \times 1 = 5$ / Private $5 \times 1 = 5$

1. प्रत्येक समुच्चय जो शून्य सदिश रखता हो :
 (अ) रेखीय स्वतंत्र
 (स) रेखीय स्वतंत्र एवं परतंत्र दोनों
 Each set containing zero vector is :
 (a) Linearly independent
 (c) Linearly independent and dependent both
 (b) Linearly dependent
 (d) None of these.
2. माना $T : U \rightarrow V$ रेखीय रूपांतरण है, तो $N(T)$ होगा :
 (अ) U का उपसमष्टि
 (स) U अथवा V का उपसमष्टि
 Let $T : U \rightarrow V$ be a linear transformation then $N(T)$ is :
 (a) A subspace of U
 (c) A subspace of U or V
 (b) A subspace of V
 (d) A subspace of both U and V .
3. सदिश $\alpha \in V(F)$ प्रसामान्य लांबिक कहलाएगा यदि : Vector $\alpha \in V(F)$ is called orthonormal if :
 (a) $(\alpha, \alpha) > 0$
 (c) $(\alpha, \beta) = 0$
 (b) $(\alpha, \alpha) < 0$
 (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
4. लेग्रांजियन गुणांकों का योग होता है : The sum of Lagrangian Coefficient is :
 (a) $n!$
 (c) -1
 (b) 1
 (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
5. गाउस-विलोपन विधि है :
 (अ) प्रत्यक्ष विधि (ब) अप्रत्यक्ष विधि (स) पुनरावृत्ति विधि (द) इनमें से कोई नहीं।
 Gauss-Elimination Method is :
 (a) Direct Method (b) Indirect Method (c) Iterative Method (d) None of these.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular $5 \times 2 = 10$ / Private $5 \times 3 = 15$

1. सदिश समष्टि $V(F)$ की दो सदिश उप-समष्टियों का सर्वनिष्ठ भी उप-समष्टि होता है। सिद्ध कीजिए।
Prove that intersection of two vector sub-space of $V(F)$ is again a vector sub-space.

अथवा OR

यदि α, β, γ सदिश समष्टि $V(F)$ के रेखीय स्वतंत्र सदिश हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha - 2\beta + \gamma$ भी रेखीय स्वतंत्र सदिश हैं।

If α, β, γ are linearly independent vectors of $V(F)$ then prove that $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha - 2\beta + \gamma$ are also linearly independent.

P. T. O.

2. सिद्ध कीजिए कि कोई समाकारिता की अद्वितीय समष्टि $U(F)$ की एक सदिश उपसमष्टि होती है।
Prove that the kernel of a homomorphism is a subspace of $U(F)$.

अथवा OR

R^n के मानक आधार के सापेक्ष निम्न ऐवं लिखित रूपान्तरण का आव्यूह ज्ञात कीजिए :
Find the matrix of the following linear map with respect to standard basis of R^n :
 $T : R^3 \rightarrow R^3$ जो परिभासित है defined by $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

3. सांबंधित सदिश को उदाहरण सहित परिभासित कीजिए।
Define Orthogonal Vectors with example.

अथवा OR

आंतर गुणन समष्टि को उदाहरण सहित परिभासित कीजिए।
Define Inner Product Space with example.

4. ✓ समीकरण $x^3 - x - 4 = 0$ का वास्तविक मूल द्विभाजन विधि से हल कीजिए।
Find the real root of the equation $x^3 - x - 4 = 0$ by Bisection Method.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\Delta \log f(x) = \log \left[1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \right]$$

5. निम्न समीकरण समुदाय को गॉड्स-विलोपन विधि से हल कीजिए :
Solve the following system of equation by Gauss-Elimination Method :

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

अथवा OR

जेकाबी-पुनरावृत्ति विधि से हल कीजिए : *Solve by Jacobi-Iteration Method :*

$$\begin{aligned} 20x + y - 2z &= 17 \\ 3x + 20y - z &= -18 \\ 2x - 3y + 20z &= 25 \end{aligned}$$

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×5=25 / Private 5×6=30

1. दर्शाइए कि क्षेत्र F के सभी क्रमित n -टप्लों का समुच्चय एक सदिश समष्टि है। <http://www.davvonline.com>
Show that the set of all ordered n -tuples of a field F is a vector space.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित जनित समष्टि का एक परिमित आधार होता है।
Show that every finite generated vector space has a finite basis.

2. ✓ जाति-शून्यता प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Rank-Nullity Theorem.

अथवा OR

दर्शाइए कि आव्यूह A विकर्णीय है : *Show that the matrix A is diagonalizable :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

3. कौशी-स्वार्ज असमिका का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Cauchy-Schwarz Inequality.

अथवा OR

परिमित विमीय समष्टियों हेतु बेसल की असमिका का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।
State and prove Bessel's Inequality for finite dimensional space.

4. समीकरण $x^3 - 3x + 1 = 0$ को न्यूटन-रेफसन विधि से हल कीजिए।

Solve the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$ by Newton-Raphson Method.

अथवा OR

न्यूटन के विभाजित अन्तर सूत्र से $f(a)$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ :

Find $f(a)$ by Newton's Divided Difference Formula, where :

x	5	7	11	13	17
$f(x)$	150	392	1452	2366	5202

गाउस-सीडल विधि से हल कीजिए : Solve by Gauss-Seidel Method :

$$5x + 2y - z = 6$$

$$x + 6y - 3z = 4$$

$$2x + y + 4z = 7$$

अथवा OR

LU नियोजित विधि से हल कीजिए : Solve by LU Decomposition Method :

$$3x + 2y + z = 10$$

$$2x + 3y + 2z = 14$$

$$x + 2y + 3z = 14.$$