

December - January 2018-19
B. Sc. IIIrd Semester ATKT Examination
गणित
MATHEMATICS

Time 3 Hours

|Max. Marks : Regular 125 / Private 150
|Min. Marks : Regular 42 / Private 50

नोट : खण्ड अ, व तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शायि अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time. <http://www.davyonline.com>

खण्ड अ : वस्तुगित Section A : Objective

Regular $15 \times 2 = 30$ / Private $15 \times 1 = 15$

9. $L^{-1}(1/P^5)$ का मान होगा : The value of $L^{-1}(1/P^5)$ is :
 (a) $t^5/5!$ (b) $t^4/4!$ (c) $t^5/6!$ (d) $t^6/6!$.
10. गुणात्मक समूह $\{1, w, w^2\}$ के अवयव w^2 की कोटि है :
 The order of the element w^2 of the multiplicative group $\{1, w, w^2\}$ is :
 (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.
11. $F = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{10} = e\}$ एक चक्रीय समूह है। G के जनकों की संख्या होगी :
 $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{10} = e\}$ is a cyclic group. The number of generator of G will be :
 (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4.
12. यदि p एक अभाज्य संख्या है तथा a कोई पूर्णांक है तो : If p is a prime number and a is any integer then :
 (a) $a^p \equiv a^2 \pmod{p}$ (b) $a^p \equiv a \pmod{p}$ (c) $a^p \equiv 1 \pmod{p}$ (d) $a^p \equiv 0 \pmod{p}$.
13. यदि G एक समूह है तथा H उसका उपसमूह हो तो H प्रसामान्य होगा यदि और केवल यदि :
 If G is a group and H is its subgroup, then H is normal if and only if :
 (a) $x^{-1}H = H \forall x \in G$ (b) $Hx^{-1} = H \forall x \in G$
 (c) $xHx^{-1} = Hx \forall x \in G$ (d) $xH = Hx \forall x \in G$.
14. चक्रीय समूह का प्रत्येक विभाग समूह चक्रीय होता है :
 (अ) हाँ (ब) नहीं (स) अनिश्चित (द) इनमें से कोई नहीं।
 Every quotient group of cyclic group is cyclic :
 (a) Yes (b) No (c) Indefinite (d) None of these.
15. क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ का प्रतिलोम है : Inverse of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:
 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5x5=25 / Private 5x9=45

1. श्रेणी $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots, p > 0$ के लिए अभिसरण और निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test for convergence and absolute convergence the series $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$, for $p > 0$.

अथवा OR

प्रत्येक अभिसारी वास्तविक अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है।

Every convergent real sequence is a Cauchy sequence.

2. धात श्रेणी विधि से हल कीजिए : Solve by power series method :

$$\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

अथवा OR

लेजांड्रे बहुपद हेतु रोड्रिग्यूज सूत्र प्राप्त कीजिए।

Obtain Rodrigue's formula for Legendre Polynomials.

3/ हल कीजिए : Solve :

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0, y = Dy = 1, \text{ जब when } t = 0, D = \frac{d}{dt}.$$

अथवा OR

ज्ञात कीजिए : Find :

$$L(t \cosh 3t).$$

4. किसी समूह G में यदि a, b कोई दो अवयव हों, तो समीकरण $ax = b$ तथा $ya = b$, G में अद्वितीय हल रखे।
 If $a, b \in G$ then the equations $ax = b$ and $ya = b$ have unique solutions in G .

अथवा OR

अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

Every group of prime order is cyclic.

5. किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक विभाग समूह चक्रीय होता है।

Every quotient group of a cyclic group is cyclic.

अथवा OR

यदि f समूह G का अन्तर्क्षेपी (आच्छादक) समूह G' का समाकारिता है, तो $f(e) = e'$ जहाँ e और e' क्रमशः G और G' के तत्समक हैं, एवं $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \forall a \in G$.

If f is a homomorphism of group G into a group G' , then $f(e) = e'$, where e and e' are the identities of G and G' respectively, and $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \forall a \in G$.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular $5 \times 14 = 70$ / Private $5 \times 18 = 90$

1. एकान्तर श्रेणी के अभिसरण के लिए लैबनीज-परीक्षण लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Leibnitz test for the convergence of an alternating series.

अथवा OR

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए : Test for convergence the following series :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

2. घात श्रेणी विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

Solve the following equation using power series method :

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$(a) 2 J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$(b) \frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

$$(c) x J_n'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$$

$$(d) x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x).$$

3. संवलन प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove convolution theorem.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \frac{1}{p}$ और अतः $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ ज्ञात कीजिए। क्या $\frac{\cot at}{t}$ का लाप्लास रूपांतर विद्यमान है?

Prove that $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \frac{1}{p}$ and hence find $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$. Does the Laplace transform of $\frac{\cot at}{t}$ exist?

4. दर्शाइये कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तरविष्ट है।

Show that union of two subgroups is subgroup if and only if one is contained in other.

अथवा OR

चक्रीय समूह की परिभाषा लिखते हुए सिद्ध कीजिए कि एक चक्रीय समूह की कोटि जनक अवयव की कोटि के बराबर होती है। Define cyclic group and prove that the order of a cyclic group is same as the order of its generator.

5. प्रत्येक परिमित समूह एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।

Every finite group is isomorphic to a permutation group.

अथवा OR

समाकारिता पर प्रथम प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove first theorem on Homomorphism.