

November - December 2017
B. Sc. IIIrd Semester Examination

MATHEMATICS

Real Analysis, Differential Equation and Abstract Algebra

Time 3 Hours]

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150
[Min. Marks : Regular 42 / Private 50

- नोट : खण्ड A, B तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शाये अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time. <http://www.davvonline.com>

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular $15 \times 2 = 30$ / Private $15 \times 1 = 15$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ का मान है : The value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ is :

 - (a) x^x
 - (b) e^{-x}
 - (c) e^x
 - (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

2. हरात्मक श्रेणी $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ है :

 - (अ) अभिसारी
 - (ब) अपसारी
 - (स) दोलनी
 - (द) इनमें से कोई नहीं ।

Harmonic series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ is :

 - (a) Convergent
 - (b) Divergent
 - (c) Oscillatory
 - (d) None of these.

3. निम्नलिखित अनन्त श्रेणी है : $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

 - (अ) अपसारी
 - (ब) प्रतिबन्धी अभिसारी
 - (स) निरपेक्ष अभिसारी
 - (द) इनमें से कोई नहीं ।

The following infinite series is $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$:

 - (a) Divergent
 - (b) Conditionally convergent
 - (c) Absoluately convergent
 - (d) None of these.

4. प्रारूप $x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_0 \neq 0$) की x में अनन्त श्रेणी, जहां ρ वास्तविक या सम्मिश्र संख्या है, कहलाती है :

 - (अ) फ्रॉबिनियस श्रेणी
 - (ब) वेसल श्रेणी
 - (स) ले जान्ड्रे श्रेणी
 - (द) इनमें से कोई नहीं ।

The infinite series in x of the type $x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_0 \neq 0$), where ρ is real or complex number, called http://www.davonline.com

 - (a) Frobenius series
 - (b) Bessel's series
 - (c) Legendre's series
 - (d) None of these.

5. $J_1 - J_0$ बराबर है : $J_2 - J_0$ is equal to :

 - (a) J_0''
 - (b) J_0'
 - (c) $2 J_0''$
 - (d) $2 J_0'$.

6. यदि $P_0(x)$ लीजान्ड्रे समीकरण का एक हल है, तब $P_0(x)$ का मान होगा :

If $P_0(x)$ is a solution of Legendre's equation, then the value of $P_0(x)$ will be :

 - (a) 1
 - (b) 0
 - (c) -1
 - (d) x .

7. $\cos at$ के लाप्लास रूपान्तरण का मान है : The value of Laplace transform of $\cos at$ is :
- (a) $\frac{p}{p^2 + a^2}$ (b) $\frac{a}{p^2 + a^2}$
 (c) $\frac{p}{p^2 - a^2}$ (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

8. $1 * 1$ का मान है : The value of $1 * 1$ is :
- (a) t (b) 0 (c) e (d) 1.

9. $L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^5} \right\}$ का मान है : The value of $L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^5} \right\}$ is :
- (a) $\frac{t^5}{5!}$ (b) $\frac{t^4}{4!}$ (c) $\frac{t^5}{6!}$ (d) $\frac{t^6}{6!}$.

10. किसी समूह G में तत्समक अवयव e की कोटि सदैव बराबर होती है :
- (अ) 1 (ब) 2
 (स) समूह G की कोटि के (द) 0.

In any group G, the order of the identity element e is always equal to :

- (a) 1 (b) 2
 (c) of the order of group G (d) 0.

11. चक्रीय समूह ($\{1, w, w^2\}$) के जनक हैं :

- (अ) 1 और w (ब) 1 और w^2
 (स) w और w^2 (द) इनमें से कोई नहीं ।

The generators of cyclic group ($\{1, w, w^2\}$) are :

- (a) 1 and w (b) 1 and w^2
 (c) w and w^2 (d) None of these.

12. यदि किसी समूह G की कोटि 15 है तो G का निम्नांकित कोटि वाला एक उपसमूह होता है :

- (अ) 11 (ब) 13 (स) 21 (द) इनमें से कोई नहीं ।

If the order of a group G is 15, then there is a subgroup of the following order :

- (a) 11 (b) 13 (c) 21 (d) None of these.

13. समूह G का एक उपसमूह H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होगा यदि और केवल यदि सभी $g \in G$ के लिये :

A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if for all $g \in G$:

- (a) $gHg^{-1} = H$ (b) $gHg^{-1} = G$
 (c) $Hg^{-1} = H$ (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

14. माना G एक समूह है । यदि $f: G \rightarrow G'$ एक तुल्यकारिता है, तब :

Let G be a group. If $f: G \rightarrow G'$ is an isomorphism, then :

- (a) $K = \{e\}$ (b) $K = G$
 (c) $K = \emptyset$ (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

15. सममित समूह S_3 का कोटि है : The order of the symmetric group S_3 is :

- (a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5x5=25 / Private 5x9=45

1. सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है ।
 Prove that every convergent sequence of real numbers is a Cauchy sequence.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी : Prove that the series :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

निरपेक्षता: अभिसारी है । absolutely convergent.

2. समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ को पात्र श्रेणी विधि से हल कीजिये।

Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ by power series method.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि : Prove that :

$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{-\cos x}{x} - \sin x \right)$$

3. $L\left\{ \frac{\cos at - \cos bt}{t} \right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate : $L\left\{ \frac{\cos at - \cos bt}{t} \right\}$

अथवा OR

$$L^{-1}\left\{ \frac{p+1}{(p^2+2p+2)^2} \right\}$$
 का मान ज्ञात कीजिये।

Evaluate : $L^{-1}\left\{ \frac{p+1}{(p^2+2p+2)^2} \right\}$.

4. सिद्ध कीजिये कि एक समूह G में अवयव a और उसके प्रतिलोम a^{-1} की कोटि समान होती है।
Prove that in a group G , the element a and its inverse a^{-1} have the same order.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

Prove that every group of prime order is cyclic.

5. यदि G समूह हो और G में सूचकांक 2 का एक उपसमूह H हो, तो सिद्ध कीजिये कि H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।
If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G , then prove that H is a normal subgroup of G .

अथवा OR

यदि $f: G \rightarrow G'$ समूहों की समाकारिता हो और e तथा e' क्रमशः G तथा G' के तत्समक अवयव हो तो सिद्ध कीजिये कि :

If $f: G \rightarrow G'$ be a homomorphism of groups and e and e' respectively, then prove that :

(a) $f(e) = e'$

(b) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$, जहां $a \in G$.

खण्ड C : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×14=70 / Private 5×18=90

- * दर्शाइये कि अनुक्रम $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ जहां :

Show that the sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, where :

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

अभिसारी है तथा इसकी सीमा L हो तब, $\frac{1}{2} < L < 1$.

and its limit is L , then $\frac{1}{2} < L < 1$.

अथवा OR

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिये :

Test the convergence of the following series :

$$x^2 + \frac{2^2}{3.4} x^4 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3.4.5.6} x^6 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3.4.5.6.7.8} x^8 + \dots$$

2. सिद्ध कीजिये कि बीजगणितीय रूप में लेजान्ड्रे वहुपद निम्न लाभिकता सम्बन्ध को संतुष्ट करते हैं :

Prove that the Legendre polynomials in algebraic form satisfy the following orthogonality relations:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{यदि } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{यदि } m = n \end{cases}$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, जहाँ n कोई पूर्णांक है ।

Prove that $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$, where n is any integer.

3. सिद्ध कीजिये कि $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \frac{1}{p}$ और अतः $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ ज्ञात कीजिये । क्या $\frac{\cos at}{t}$ का लाप्लास रूपान्तरण विद्यमान है ?

Prove that $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1} \frac{1}{p}$ and hence find $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$. Does the Laplace transform of $\frac{\cos at}{t}$ exist.

अथवा OR

समीकरण $(D^2 + 1)y = t \cos 2t$, को हल कीजिये, $y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ जब $t = 0$.

Solve $(D^2 + 1)y = t \cos 2t, y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ when $t = 0$.

4. सिद्ध कीजिये कि, इकाई के चार चतुर्थ मूलों का समुच्चय गुणन संक्रिया के सापेक्ष एक परिमित आवेदी समूह है ।
Prove that the set of four fourth roots of unity forms a finite abelian group with respect to multiplication.

अथवा OR

मान लो H , समूह G का एक उपसमूह है, दो सिद्ध कीजिये कि H के G में दो वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय या तो संपाती है या असंयुक्त है ।

Let H be a subgroup of a group G . Then prove that any two left (right) cosets of H in G are either identical or disjoint. <http://www.davvonline.com>

5. यदि G एक समूह है तथा N, G का एक प्रसामान्य उपसूह है, तो सिद्ध कीजिये कि G में N के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय G/N भी सहसमुच्चयों के गुणन के सापेक्ष एक समूह है ।

If G be a group and N be a normal subgroup of G , then prove that the set G/N of all cosets of N in G is also a group with respect to the product of cosets.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित समूह G , एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है ।

Prove that every finite group G is isomorphic to a permutation group.