

November - December 2016
B. Sc. IIIrd Semester Examination
गणित
MATHEMATICS

Real Analysis, Differential Equation and Abstract Algebra

Time 3 Hours

[Max. Marks : Regular 125 / Private 150]

नोट : खण्ड A, B तथा स सभी नियमित एवं प्रायवेट विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शायी अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time. http://www.davvonline.com

खण्ड A : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular $15 \times 2 = 30$ / Private $15 \times 1 = 15$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n}{n+1}$ का मान है : The value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n}{n+1}$ is :

(a) $\log 2$ (b) ∞ (c) 0 (d) 1
2. अनंत श्रेणी $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ अपसारी होगी यदि :

The infinite series $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ is divergent if :

(a) $p > 1$ (b) $p \leq 1$ (c) $p = 2$ (d) $p = 3$
3. अनंत गुणोत्तर श्रेणी $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ है :

(अ) अभिसारी (ब) अपसारी (स) दोलायमान (द) इनमें से कोई नहीं ।

The infinite geometric series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ is :

(a) Convergent (b) Divergent (c) Oscillatory (d) None of these.
4. अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ कहलाती है :

(अ) n कोटि की वेसल समीकरण (ब) n कोटि की लेजाण्ड्रे समीकरण
 (स) n कोटि की फ्यूजन समीकरण (द) इनमें से कोई नहीं ।

The differential equation $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$ is called :

(a) Bessel's equation of order n (b) Legendre's equation of order n
 (c) Fuchsion equation of order n (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.
5. जब n कोई पूर्णांक हो तब $J_n(-x)$ का मान होगा : When n is any integer, then value of $J_n(-x)$ is :

(a) $J_n(x)$ (b) $-J_n(x)$
 (c) $(-1)^n J_n(x)$ (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.
6. लेजाण्ड्रे बहुपद $P_n(1)$ का मान है : The value of Legendre's polynomial $P_n(1)$ is :

(a) 0 (b) 1
 (c) $\frac{1}{2} n(n+1)$ (d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

P. T. O.

7. $\cos at$ का लाप्लास रूपान्तरण होगा : The value of Laplace transformation of $\cos at$ is :

- (a) $\frac{a}{p^2 + a^2}$ (b) $\frac{p}{p^2 + a^2}$ (c) $\frac{a}{p^2 - a^2}$ (d) $\frac{p}{p^2 - a^2}$

8. $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+1)^2} \right\}$ का मान होगा : The value of $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+1)^2} \right\}$ is :

- (a) $t e^{-t}$ (b) e^{-t} (c) t (d) t^2

9. $\sin t \cdot \cos t$ का लाप्लास रूपान्तरण है : Laplace transformation of $\sin t \cdot \cos t$ is :

- (a) $\frac{1}{p+4}$ (b) $\frac{1}{p^2+2^2}$ (c) $\frac{p}{p^2+2^2}$ (d) $\frac{p}{p+4}$

10. नीचे दी गई बीजगणितीय संरचना में से कौन सी समूह नहीं है :

In the following algebraic structure, which is not a group :

- (a) $(I, +)$ (b) $(R, +)$ (c) $(I, -)$ (d) $(C, +)$

11. समूह $[(1, w, w^2), .]$ में w की कोटि है : The order of w in group $[(1, w, w^2), .]$ is :

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

12. चक्रीय समूह $(\{1, -1, i, -i\}, .)$ का जनक होगा :

- (a) 1 और -1 (b) 1 और i (c) -1 और i (d) i और $-i$

The generators of cyclic group $(\{1, -1, i, -i\}, .)$ are :

- (a) 1 and -1 (b) 1 and i (c) -1 and i (d) i and $-i$

13. यदि G कोई परिमित समूह है तथा H , G का प्रसामान्य उपसमूह है तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है :

If G is finite group and H is a normal subgroup of G , then which of the following statement is true :

- (a) $o\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{o(G)}{o(H)}$ (b) $o\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{o(H)}{o(G)}$ (c) $o\left(\frac{G}{H}\right) = o(G)o(H)$ (d) $o\left(\frac{G}{H}\right) = o(G) + o(H)$

14. H समूह G का उपसमूह है तथा $a \neq b$, $a, b \in G$ तब $aH = bH$ होगा यदि :

H is a subgroup of the group G , $a \neq b$, $a, b \in G$ then $aH = bH$ if :

- (a) $ab^{-1} \in H$ (b) $a^{-1}b \in H$ (c) $b^{-1}a \in H$ (d) $ba^{-1} \in H$

15. क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ का प्रतिलोम होगा : The inverse of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ is :

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5x5=25 / Private 5x9=45

1. दर्शाइये कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिवर्द्ध होता है ।

Show that every Cauchy sequence is bounded.

अथवा OR

दर्शाइये कि प्रत्येक सर्वथा अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है ।

Show that every absolutely convergent series is convergent.

2. दर्शाइये : Show that : $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

अथवा OR

$f(x) = 10x^2 - 3x^2 - 5x - 1$ को लेजाण्ड्र बहुपद में व्यक्त कीजिए ।

Express $f(x) = 10x^2 - 3x^2 - 5x - 1$ in terms of Legendre Polynomial.

3. ज्ञात कीजिए : Find :

$$L\{t \sin^2 t\}.$$

अथवा OR

ज्ञात कीजिए : Find : $L^{-1} \left\{ \frac{p+1}{p^2 + 6p + 25} \right\}$

4. दर्शाइये प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है।
Show that every cyclic group is an abelian group.

अथवा OR

यदि H_1 व H_2 , समूह G के कोई दो उपसमूह हों तो दर्शाइये कि $H_1 \cap H_2$ भी समूह G का उपसमूह होगा।
If H_1 and H_2 are two subgroup of group G then show that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of group G .

5. दर्शाइये कि समूह G का उपसमूह H प्रसामान्य होगा यदि और केवल यदि $xHx^{-1} = H \forall x \in G$.
Show that a subgroup H of a group G , is normal if and only if $xHx^{-1} = H \forall x \in G$.

अथवा OR

क्रमचय $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

Find the inverse of permutation $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular $5 \times 14 = 70$ / Private $5 \times 18 = 90$

1. सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)^{1/n}}{n} \right] = \frac{4}{e}.$$

अथवा OR

निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए : Test for convergence of following series :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \dots \quad \text{http://www.davvonline.com}$$

2. अवकल समीकरण $2xy'' - y' - y = 0$ को श्रेणी विधि से हल कीजिए।
Solve the differential equation $2xy'' - y' - y = 0$ by series method.

अथवा OR

- सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x).$$

3. फलन $f(t) = \frac{1 - \cos at}{t}$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

Find the Laplace transformation of function $f(t) = \frac{1 - \cos at}{t}$.

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0, \quad y = Dy = 1 \text{ when } t = 0, \quad D \equiv \frac{d}{dt}.$$

4. दर्शाइये कि समुच्चय $G = \{1, w, w^2\}$ गुणन के सापेक्ष एक आबेली समूह है।

Show that set $G = \{1, w, w^2\}$ is an abelian group with respect to multiplication.

अथवा OR

लेग्रांज प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's Theorem.

5. यदि f समूह G से समूह G' पर समाकिरता हो तो f की अटि समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होगा।
If f is a homomorphism of a group G into group G' , then show that Kernel of f is a normal subgroup of G .

अथवा OR

दर्शाइये कि n प्रतीकों के $n!$ क्रमचयों में $\frac{n!}{2}$ सम क्रमचय तथा $\frac{n!}{2}$ विषम क्रमचय होते हैं।

Show that of the $n!$ permutations of n symbols, $\frac{n!}{2}$ are even permutation and $\frac{n!}{2}$ are odd permutation.