Roll No. .....

6000 25/50/30/40

April - May 2019

B. Sc. II Year (3 Y. D. C.) Examination

गणित

MATHEMATICS

Paper I Abstract Algebra

Time 3 Hours] [Max. Marks Regular 50 Private 50

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शाये अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular 5×1=5 / Private 5×1=5

1. कोटि 10 के चक्रीय समूह $G = (a)$ के जनकों की संख्या होती है :
   The number of generators of a cyclic group $G = (a)$ of order 10 will be :
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

2. यदि H और K समूह G के दो परिमित उपसमूह हों, तब :
   If H and K are two finite subgroups of a group G, then :
   (a) $o(HK) = \frac{o(H)}{o(K)}$ (b) $o(HK) = \frac{o(H)\,o(K)}{o(H \cap K)}$ (c) $o(HK) = \frac{o(H \cap K)}{o(H)\,o(K)}$ (d) $o(HK) = \frac{o(H)\,o(K)}{o(H \cup K)}$

3. यदि $f : G \to G'$ अष्टि K सहित समूह तुल्यकारिता है, तब :
   If $f : G \to G'$ is a group isomorphism with kernel K, then :
   (a) $K = \{e\}$ (b) $K = \phi$ (c) $K = G$ (d) $K = G'$

4. आबेली समूह G के किसी अवयव a की संयुग्मी कक्षा $C(a)$ बराबर होगी :
   The conjugate class $C(a)$ of an element a of an abelian group G is equal to :
   (a) ϕ (b) $\{e\}$ (c) G (d) $\{a\}$

5. निम्न में से कौन सा बीजगणितीय संरचना एक इकाई रहित क्रम विनिमेय वलय है :
   Which algebraic structure in the following is a commutative ring without unity :
   (a) (I, +, .) (b) (2I, +, .) (c) (Q, +, .) (d) (R, +, .)

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5×2=10 / Private 5×3=15

1. एक उदाहरण सहित समूह को परिभाषित कीजिये।
   Define Group with an example.

   अथवा OR

   माना कि G एक समूह है तथा $a \in G$ तब सिद्ध कीजिये : Let G be a group and $a \in G$ then prove that :
   $o(a) = o(a^{-1})$

2. समूह G के एक उपसमूह H के लिए सिद्ध कीजिये : Prove that for a subgroup H of a group G :
   $Hh = H = hH,\ h \in H$

   अथवा OR

   कीजिये कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।
   That the intersection of two normal subgroups of a group is a normal subgroup of that

P. T. O.

3. समूहों के समाकारिता एवं तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिये ।
Define Homomorphism and Isomorphism of Groups.

अथवा OR

क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये ।

Find the inverse of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. समूह स्वकारिता एवं अंतः स्वकारिता को परिभाषित कीजिये ।
Define Group Automorphism and Inner Automorphism.

अथवा OR

किसी समूह में सिद्ध कीजिये कि संयुग्मी संबंध एक तुल्यता संबंध होता है ।
Prove that in a group conjugacy relation is an equivalence relation.

5. किसी वलय (R, +, .) के लिये निम्न को सिद्ध कीजिये : For any ring (R, +, .) prove the following :
(i) $a.0 = 0$
(ii) $a.(-b) = -ab$.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि वलय समाकारिता $f : R \to R'$ का समाकारिता प्रतिबिम्ब R′ की एक उपवलय है ।
Prove that the homomorphic image of ring homomorphism $f : R \to R'$ is a subring of R′.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×5=25 / Private 5×6=30

1. सिद्ध कीजिये कि समूह G का एक अरिक्त उपसमुच्चय H समूह G का उपसमूह होगा यदि और केवल यदि :
$\forall\, a \in H, b \in H \Rightarrow a.b^{-1} \in H$; b^{-1} अवयव b का प्रतिलोम है ।
Prove that a non empty subset H of a group G is a subgroup of group G if and only if :
$\forall\, a \in H, b \in H \Rightarrow a.b^{-1} \in H$; b^{-1} is the inverse of element b.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है ।
Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

2. लैग्रांज प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये ।
State and prove Lagrange's Theorem.

अथवा OR

विभाग समूह को परिभाषित कीजिये । सिद्ध कीजिये कि एक आबेली समूह का विभाग समूह आबेली होता है परंतु इसका विलोम सत्य नहीं होता है ।
Define Quotient Group. Prove that the quotient group of an abelian group is abelian but the converse is not true.

3. समूह समाकारिता की आधारभूत प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये ।
State and prove the Fundamental Theorem on group homomorphism.

अथवा OR

सिद्ध कीजिये कि n प्रतीकों के साथ $n!$ क्रमचयों में $\frac{n!}{2}$ सम एवं $\frac{n!}{2}$ विषम क्रमचय होते हैं ।
Prove that among the $n!$ permutations with n symbols, $\frac{n!}{2}$ are even and $\frac{n!}{2}$ are odd permutations.

4. सिद्ध कीजिये कि समूह G का केन्द्र Z(G), समूह G का एक [illegible] उपसमूह होता है ।
Prove that the centre Z(G) of group G is a normal subgroup of group G.

अथवा OR

[illegible] आबेली समूह के लिये कैली का प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये ।
State and prove Cayley's theorem for finite non abelian groups.

5. दर्शाइये कि सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय एक पूर्णांकीय प्रांत होता है ।
Show that the set of complex numbers is an integral domain.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रांत एक क्षेत्र होता है ।
Prove that every finite integral domain is a field.