Roll No. ....

5000 20/40/30/40

315-N

March – April 2022

B. Sc. II Year (3 Y. D. C.) Examination

गणित

MATHEMATICS

PAPER I : ABSTRACT ALGEBRA

Time 3 Hours] [Max. Marks : Regular 40 / Private 50

[Min. Marks : Regular 13 / Private 17

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिए गए निर्देशों का पालन करें। सभी के लिए अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दर्शाये अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनिट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective Regular 5×1=5 / Private 5×1=5

1. चक्रीय समूह $(\{1, -1, i, -i\}, .)$ के जनक निम्न युग्म है :
   The generators of the cycle group $(\{1, -1, i, -i\}, .)$ are :
   (a) $1, -1$ (b) $1, i$
   (c) $-1, i$ (d) $i, -i$.

2. यदि G एक समूह है तो समूह G/K परिभाषित होगा :
   (अ) K, G का एक उपसमूह है (ब) K एक सीमित उपसमूह है
   (स) K एक प्रसामान्य उपसमूह है (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं।
   If G is a group, then the group G/K will be defined if :
   (a) K is a subgroup of G (b) K is a finite subgroup
   (c) K is a normal subgroup (d) None of the above.

3. फलन $f : G \to G'$ तुल्याकारी होता है यदि :
   (अ) f एकैकी है (ब) f आच्छादक है
   (स) f एकैकी, आच्छादक है (द) f एकैकी, आच्छादक और समाकारी है।
   The function $f : G \to G'$ is an isomorphism if :
   (a) f is one-one (b) f is onto
   (c) f is one-one and onto (d) f is one-one, onto and homomorphism.

4. आबेली समूहों के लिए तत्समक प्रतिचित्रण है :
   (अ) एकैकी (ब) आच्छादक (स) समाकारिता (द) उपरोक्त सभी।
   For abelian groups, the identity mapping is :
   (a) One-one (b) Onto (c) Homomorphism (d) All of the above.

5. निम्न में से कौन-सा क्षेत्र नहीं है : Which of the following is not a field :
   (a) (R, +, .) (b) (C, +, .)
   (c) (E, +, .) (d) (Q, +, .).

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer Regular 5×2=10 / Private 5×3=15

1. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक असमूह होता है।
   Prove that : Intersection of two subgroups of a group G, is a subgroup of G.

अथवा OR

कोटि 10 के चक्रीय समूह के कितने जनक होते हैं ?
How many generators are there of the cyclic group of order 10 ?

P. T. O.

2. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र Z, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।
Prove that : The centre Z of a group G is a normal subgroup of G.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि किसी उपसमूह के दो दक्षिण सहसमुच्चय या तो विसंधीय या सर्वसम होते हैं।
Any two right cosets of a subgroup are either disjoint or identical. Prove it.

3. क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ के प्रतिलोमन ज्ञात कीजिए।
Find inversions of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि समान कोटि के दो चक्रीय समूह तुल्याकारी होते हैं।
Prove that, the two cyclic groups of equal orders are isomorphic.

4. यदि H एक समूह G का एकमात्र P-सिलो उपसमूह है, तब सिद्ध कीजिए कि H, G में प्रसामान्य है और विलोमतः भी।
If H is a only P-Sylow subgroup of a group G, then prove that H is normal in G and conversely.

अथवा OR

मान लो R^+ सभी दृढ़तः धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है। $f : R^+ \to R^+$ को :
Let R^+ be the multiplication group of all strictly positive real number. Define $f : R^+ \to R^+$ by :

$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in R^+$$

से परिभाषित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि f एक स्वकारिता है।
Prove that f is an automorphism.

5. पूर्णांकों का वलय मॉड्यूलो P एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है यदि और केवल यदि P एक अभाज्य संख्या है। सिद्ध कीजिए।
The ring of integers module P is an integral domain if and only if P is prime. Prove it.

अथवा OR

यदि वलय $(I_6, +_6, \cdot_6)$ में निम्न बहुपद है :

$$f(x) = 2 + 4x + 2x^2,\ g(x) = 2x + 4x^2$$

तो ज्ञात कीजिए :
(a) घात $[f(x) + g(x)]$ (b) घात $[f(x).g(x)]$
If the following polynomials are in the ring $(I_6, +_6, \cdot_6)$, then find :
(a) deg $[f(x) + g(x)]$ (b) deg $[f(x).g(x)]$
where $f(x) = 2 + 4x + 2x^2$, $g(x) = 2x + 4x^2$.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×5=25 / Private 5×6=30

1. यदि समूह G के अवयव a की कोटि n है, तब $a^m = e$ यदि और केवल यदि n, m का भाजक है। सिद्ध कीजिए।
If $O(a) = n$ for some $a \in G$, then $a^m = e$ if and only if n is a divisor of m. Prove it.

अथवा OR

दर्शाइये कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट है।
Show that union of two subgroups is a subgroup if and only if one is contained in the other.

2. मान लो H और K एक समूह G के परिमित उपसमूह हैं, तब सिद्ध कीजिए कि :
Let H and K be finite subgroups of a group G, then prove that :

$$O(HK) = \frac{O(H)\,O(K)}{O(H \cap K)}.$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का एक उपसमूह H, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चयों का गुणनफल पुनः G में एक दक्षिण सहसमुच्चय है।
Prove that : A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if the product of two right coset of H in G is again a right coset of H in G.

3. समूहों पर समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
State and prove the fundamental theorem on homomorphism of groups.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूह G एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।
Prove that : Every finite group G is isomorphic to a permutation group.

4. यदि G कोटि P^n का एक समूह है, जहां P एक अभाज्य संख्या है तथा n एक धन पूर्णांक है तब सिद्ध कीजिए कि $Z(G) \neq (e)$।
Prove that : If G is a group of order P^n, where P is a prime number and n is a positive integer, then $Z(G) \neq (e)$.

अथवा OR

परिमित आबेली समूहों के लिए कौशी प्रमेय का कथन लिखिए व उसे सिद्ध कीजिए।
State and prove Cauchy's theorem for finite abelian groups.

5. सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्षेत्र होता है।
Prove that every isomorphic image of a field is a field.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।
Prove that every finite integral domain is a field.
