

April - May 2018

B. Sc. I Year (3 Y. D. C.) Examination

गणित

MATHEMATICS

तृतीय प्रश्नपत्र : सदिश विश्लेषण एवं ज्यामिति

Paper III : Vector Analysis and Geometry

Time 3 Hours]

DAVVonline.com

[Max. Marks : Regular 40 / Private 50

[Min. Marks : Regular 13 / Private 17

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये गये निर्देशों का पालन करें। सभी के लिये अंक विभाजन योजना प्रश्नपत्र में दशमि अनुसार होगी। दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनट अतिरिक्त समय की अनुमति है।

Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular 5×1=5 / Private 5×1=5

1. निम्न कथनों में से कौन सा कथन असत्य है ? Which statement of the following statements is false ?

- (a) $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{a}$ (b) $\text{Curl } \vec{A} = 0$ (c) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$ (d) $\text{div } \vec{a} = 0$.

2. निम्न कथनों में से कौन सा कथन सत्य है ? Which statement of the following statements is true ?

- (a) $\int_S (\vec{F} \times \vec{n}) dS = \int_V \text{curl } \vec{F} dV$ (b) $\int_S (\vec{n} \times \vec{F}) dS = \int_V \text{curl } \vec{F} dV$
(c) $\int_S \left(2\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} \right) dt \neq \vec{f}^2 + C$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.

3. अतिपरवलय हेतु कौनसा कथन सत्य है ? For hyperbola which statement is true ?

- (a) $e = 1$ (b) $e < 1$
(c) $e > 1$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.

4. निम्न समीकरणों में से कौन सा समीकरण उस शंकु को निरूपित करता है, जिसका शीर्ष (0, 0, 0) है :

Which equation of the following equations represents that cone whose vertex is (0, 0, 0) :

- (a) $4x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 4xy + 7y + 4 = 0$ (b) $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4yz + 5xy = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 3xy + 7y + 4 = 0$ (d) $4x^2 + 7y^2 + 3xy + 4yz + 5zx + 5 = 0$.

5. यदि n किसी दीर्घवृत्तज के वास्तविक शून्य वृत्तकों की संख्या हो तो n का मान हो सकता है ?

If n is the number of real umbilics of an ellipsoid then the value of n may be ?

- (a) 5 (b) 0
(c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

Regular 5×2=10 / Private 5×3=15

1. सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\text{curl } (\vec{f} + \vec{F}) = \text{curl } \vec{f} + \text{curl } \vec{F}.$$

DAVVonline.com

अथवा OR

$$\text{curl grad } \vec{f} = 0.$$

2. यदि If

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, & (t = 2) \\ 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, & (t = 3) \end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि : Then prove that :

DAVVonline.com

$$\int_2^3 \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = 10.$$

अथवा OR

यदि S कोई संवृत पृष्ठ हो, जो आयतन V को घेरता है तथा $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 6V.$$

If S is any closed surface enclosing a volume V and $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, then prove that :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 6V$$

3. उस शंकु का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि ध्रुव हो एवं अक्ष प्रारम्भिक रेखा हो ।

Find the polar equation of the conic whose focus is pole and axis is initial line.

अथवा OR

वृत्तों $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ एवं $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ की उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण तथा लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Find the equation and length of the common chord of the circles $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ and $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$.

4. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(1, 2, 3)$ है एवं आधार वक्र $y^2 = 4ax, z = 0$ है ।

Find the equation of the cone whose vertex is $(1, 2, 3)$ and base curve is $y^2 = 4ax, z = 0$.

अथवा OR

DAVVonline.com

किसी शंकु की तीन परस्पर लम्बवत जनक रेखाएँ होने की शर्त ज्ञात कीजिए ।

Find the condition that a cone has three mutually perpendicular generating lines.

5. $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्श तलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 9y - 3z = 0, 3x - 3y + 6z = 5$ से होकर जाते हों ।

Find the equation of tangent planes to $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the line $x + 9y - 3z = 0, 3x - 3y + 6z = 5$.

अथवा OR

अतिपरवलय $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ की बिन्दु $(2, 3, -4)$ से होकर जाने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equations of the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$, which pass through the point $(2, 3, -4)$.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×5=25 / Private 5×6=30

1. मान ज्ञात कीजिए : Find the value of :

$$(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times \left\{ (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \right\}.$$

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

DAVVonline.com

$$\text{div grad } r^m = m(m+1)r^{m-2}.$$

2. $\int_C [(xy + y^2) dx + x^2 dy]$ के लिए समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C , $y = x$ एवं $y = x^2$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's Theorem in the plane for $\int_C [(xy + y^2) dx + x^2 dy]$ where C is the boundary of the region defined by $y = x$ and $y = x^2$.

DAVVonline.com

अथवा OR

स्टोक के प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ तथा पृष्ठ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का xy -समतल के ऊपर का भाग है।

Verify Stoke's Theorem when $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, above the xy -plane.

3. वक्र $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ का अनुवेषण कीजिए एवं इसकी नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Trace the curve $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ and find the equation of its directrix.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि किसी भी शंकु में दो लम्बरूप नाभिगत जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

Prove that in any conic the sum of reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.

4. उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ एवं त्रिज्या 2 इकाई हो।
Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$ and radius is 2 units.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लम्बवत रेखाओं में काटता है, यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Prove that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines, if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

DAVVonline.com

5. सिद्ध कीजिए कि समतल $lx + my + nz = 0$ से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के परिच्छेद का क्षेत्रफल $\frac{\pi abc}{p}$ है, जहाँ p केन्द्र से दत्त समतल के समान्तर स्पर्श तल की दूरी है।

Prove that the area of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ by the plane

$lx + my + nz = 0$ is $\frac{\pi abc}{p}$, where p is the perpendicular from centre to the tangent plane which is parallel to the given plane.

अथवा OR

यदि निर्देशक अक्ष समकोणिक हों, तो दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बराबर संयुग्मी व्यासों का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

If the axes are rectangular, find the locus of equal conjugate diameters of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

DAVVonline.com