

June 2017
B. Sc. IVth Semester Examination
MATHEMATICS

Abstract Algebra, Advanced Calculus, Partial Differential Equations, Complex Analysis

Time 3 Hours]

नोट : खण्ड अ, ब तथा स सभी नियमित एवं स्वाध्यायी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है। प्रत्येक खण्ड में दिये दृष्टि बाधित परीक्षार्थियों के लिये 60 मिनट अतिरिक्त समय की अनुमति है।
Section A, B and C are compulsory for all Regular and Private students. Please follow the instructions, given in each section. Marks distribution for all students are as shown in question paper. The blind candidates will be given 60 minutes extra time.

खण्ड अ : वस्तुनिष्ठ Section A : Objective

Regular $15 \times 2 = 30$ /Private $15 \times 1 = 15$

- यदि $f: G \rightarrow G$ में इस प्रकार परिभाषित है $f(x) = x^{-1}$, तब f समूह G की स्वकारिता होगी यदि और केवल यदि :
(अ) G अर्द्धसमूह है (ब) G अआबेली है (स) G आबेली है (द) इनमें से कोई नहीं।
Let $f: G \rightarrow G$ be defined by $f(x) = x^{-1}$, then f is automorphism, of G if :
(a) G is semigroup (b) G is non abelian (c) G is abelian group (d) None of these.
- यदि G एक आबेली समूह है और $a \in G$ तब $c(a) =$: If G is an abelian group and $a \in G$ then $c(a) =$:
(a) ϕ (b) {e}
(c) {a} (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- यदि G एक परिमित आबेली समूह है और $P \mid o(G)$ जहां P अभाज्य संख्या है तब यहां एक अवयव $a (\neq e) \in G$ इस प्रकार से होगा कि :
If G is a finite abelian group, P is prime and $P \mid o(G)$ then there is an element $a (\neq e) \in G$ such that :
(a) $a^P = a$ (b) $a^P = e$
(c) $a^P = G$ (d) इनमें से कोई नहीं। None of these.
- निम्न में से कौन सी संरचना वलय नहीं है : Which of the following structure is not a ring :
(a) $(2, \mathbb{I}, +, \cdot)$ (b) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ (c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- निम्न में से कौन सा कथन सत्य है :
(अ) प्रत्येक समूह एक क्षेत्र होता है (ब) प्रत्येक पूर्णकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है
(स) प्रत्येक वलय एक क्षेत्र होता है (द) प्रत्येक परिमित पूर्णकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।
Which of the following statement is true :
(a) Every group is a field (b) Every integral domain is a field
(c) Every ring is a field (d) Every finite integral domain is a field.
- किसी वलय $(R, +, \cdot)$ के गुणजावलियों के संग्रह का सर्वनिष्ठ है :
(अ) वलय (ब) क्षेत्र (स) गुणजावली (द) पूर्णकीय प्रान्त।
The intersection of arbitrary collection of ideals of any ring $(R, +, \cdot)$ is :
(a) Ring (b) Field (c) An ideal (d) Integral domain.
- माना $f(x, y)$, x और y का फलन है एवं r, s, t अपने स्वाभाविक अर्थ में हैं, तब $f(x, y)$ बिन्दु (a, b) पर उचित रखता है, यदि :
Suppose $f(x, y)$ be function of x and y and r, s, t have their usual meaning. Then f has maximum at a point (a, b) if :
(a) $rt - s^2 < 0, r > 0$ (b) $rt - s^2 < 0, r < 0$ (c) $rt - s^2 > 0, r > 0$ (d) $rt - s^2 > 0, r < 0$.
P. T. O.

8. यदि $a = -\infty$ या $b = \infty$ या दोनों तथा $f(x)$ परिवर्त्त है तब $\int_a^b f(x) dx$ कहलाता है :

(अ) उचित समाकल

(ब) प्रथम प्रकार के विषम समाकल

(स) द्वितीय प्रकार के विषम समाकल

(द) तृतीय प्रकार के विषम समाकल ।

If $a = -\infty$ or $b = \infty$ or both and $f(x)$ is bounded then $\int_a^b f(x) dx$ is called :

(a) Proper integral

(b) Improper integral of first kind

(c) Improper integral of second kind

(d) Improper integral of third kind.

$$9. \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = :$$

(a) $B(m, n)$

(b) $B(n, m)$

(c) $\frac{1}{2} B(m, n)$

(d) $2 B(m, n)$.

10. यदि $P, Q, R; x, y, z$ के फलन है तब लैग्राज अवकल समीकरण का प्रामाणिक रूप है :

If P, Q, R are functions of x, y, z then the standard form of Lagrange's differential equation is
 (a) $Pq + Qp = R$ (b) $Pp + Qq = R$ (c) $Pq - Qp = R$ (d) $Pp - Qq = R$.

11. अवकल समीकरण $r = 6x$ का हल है : The solution of the differential equation $r = 6x$ is :

(a) $z = y^3 + yf(x) + \phi(y)$

(b) $z = x^3y^3$

(c) $z = x^3 + xf(y) + \phi(x)$

(d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

12. $r + a^2 t = 0$ का सहायक समीकरण है : Auxiliary equation of $r + a^2 t = 0$ is :

(a) $m^2 + a^2 = 0$

(b) $m^2 - a^2 = 0$

(c) $m^2 - 2a = 0$

(d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

13. कौशी-रीमान समीकरण है : The Cauchy-Riemann equations are :

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ और $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(d) इनमें से कोई नहीं । None of these.

14. यदि $W = T_1(Z) = \frac{Z+2}{Z+3}$; $W = T_2(Z) = \frac{Z}{Z+1}$ तब $T_1 T_2(Z) =$:

If $W = T_1(Z) = \frac{Z+2}{Z+3}$; $W = T_2(Z) = \frac{Z}{Z+1}$ then $T_1 T_2(Z) =$:

(a) $\frac{3Z+2}{4Z+3}$

(b) $\frac{3Z+3}{4Z+4}$

(c) $\frac{4Z+3}{3Z+2}$

(d) $\frac{5Z+9}{2Z+1}$

15. $W = \frac{Z}{Z-2}$ के नियत बिन्दु है : Fixed points of $W = \frac{Z}{Z-2}$ are :

(a) 0, 2

(b) 0, 3

(c) 1, 2

(d) 2, 3.

खण्ड ब : लघु उत्तरीय Section B : Short Answer

1. यदि G एक समूह है तथा ϕ, G का एक स्वाकारिता है और $a \in G$ की कोटि $o(a) > 0$, तब $o(\phi(a)) = o(a)$ ।

If G be a group and ϕ an automorphism of G . If $a \in G$ is of order $o(a) > 0$ then $o(\phi(a)) = o(a)$ ।

दर्शाइये कि संयुक्तीयता G पर एक तुल्यता सम्बन्ध होता है ।

Show that conjugacy is an equivalence relation on G .

अथवा OR

2. दर्शाइये एक बलय R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम सत्य है ।

Show that a ring R is without zero divisors if and only if the cancellation law holds in R .

अथवा OR

दर्शाइये कि समिश्र संख्याओं का समुच्चय कमित पूर्णकीय प्रांत नहीं है ।

Show that the set of complex numbers is not an ordered integral domain.

3. प्रतिबंधों $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ और $lx + my + nz = 0$ के अन्तर्गत $u = x^2 + y^2 + z^2$ के उच्चित मान ज्ञात कीजिए।
 Find the maxima and minima of $u = x^2 + y^2 + z^2$ subject to the conditions $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and $lx + my + nz = 0$.

समाकल $\int_a^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ जहाँ $a > 0$ के अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the integral $\int_a^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ where $a > 0$.

4. अवकल समीकरण $z = px + qy + pq$ का पूर्ण, व्यापक एवं विचित्र हल ज्ञात कीजिए।
 Find the complete, general and singular solution of $z = px + qy + pq$.

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

5. सिद्ध कीजिए कि फलन $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 + 3y^2 + 1$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 + 3y^2 + 1$ satisfies Laplace's equation and determine corresponding analytic function $u + iv$.

अथवा OR

$W = \frac{3Z - 4}{Z - 1}$ द्विरेखिक रूपान्तर के स्पर्श बिन्दु और प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed points and normal form of the bilinear transformation $W = \frac{3Z - 4}{Z - 1}$.

खण्ड स : दीर्घ उत्तरीय Section C : Long Answer

Regular 5×14=70/Private 5×18=90

1. दर्शाइये कि किसी समूह G के सभी स्वाकरिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन को संयोजन के रूप में लेने के सापेक्ष एक समूह है।

Show that the set of all automorphism of a group G forms a group with respect to composition of mapping as the composition.

अथवा OR

परिमित अन-आबेली समूहों के लिये कौशी प्रमेय के कथन को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Cauchy's theorem for finite no.: abelian groups.

2. दर्शाइये कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Show that every finite integral domain is a field.

अथवा OR

दर्शाइये कि एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके विभाग वलय से तुल्यकारी होता है।

Show that every homomorphic image of a ring is isomorphic to its Quotient ring.

3. फलन $u = x^3 + y^3 - 3axy$ के उच्चित की विवेचना कीजिए।

Discuss the maxima and minima of function $u = x^3 + y^3 - 3axy$.

अथवा OR

दर्शाइये : Show that :

$$\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}.$$

4. चारपिट विधि से पूर्ण हल ज्ञात कीजिए : Solve by Charpit's method :

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

अथवा OR

हल कीजिए : Solve :

$$p + r + s = 1.$$

5. $f(z)$ फलन के विश्लेषित होने के लिये आवश्यक प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

Find the necessary condition for $f(z)$ to be analytic.

अथवा OR

उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो 0, 1 और ∞ को क्रमशः 1, i और -1 में प्रतिचित्रण करता है।

Find the Möbius transformation with maps 0, 1 and ∞ into 1, i and -1 respectively.